ECOLE POLYTECHNIQUE — **OPTION M'**

CONCOURS D'ADMISSION 1984

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Le problème fait intervenir des intégrales de fonctions à valeurs complexes sur les intervalles non bornés $[\,0, +\infty\,[$ et $[\,1, +\infty\,[$. Si φ est une fonction complexe définie et continue sur $[\,1, +\infty\,[$ telle que l'intégrale $\int_1^X \varphi(t)\,dt$ admette une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque le réel $X \geqslant 1$ tend vers $+\infty$, on note cette limite $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ et on dit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge ; si de plus l'intégrale $\int_1^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt$ converge, on dit que $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge absolument. Des définitions analogues et le même vocabulaire sont employés pour le cas des fonctions complexes définies et continues sur $]\,0,1\,]$, lorsque la variable tend vers 0. On rappelle, sans en demander aucune démonstration, que les intégrales convergentes ainsi définies ont les mêmes propriétés opératoires et présentent le même lien entre convergence absolue et convergence que les intégrales de fonctions à valeurs réelles.

D'autre part, on note Ω l'ouvert complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des réels positifs ou nul et Ω' l'ensemble $\Omega \cup \{\,0\,\}$ complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des réels strictement positifs.

I

1 - Soit φ une fonction à valeurs complexes définie et continue sur $[\,1, +\infty\,[$, et soit (z_1, z_2) un couple quelconque de points de Ω'.

a. Montrer que la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ équivaut à la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\frac{t - z_1}{t - z_2}\,dt$.

b. Etablir la même équivalence entre les convergences de ces intégrales (on pourra utiliser une intégration par parties).

2 - *Dans toute la suite du problème*, $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions f à valeurs complexes, définies et continues sur $]\,0, +\infty\,[$ et telles que, de plus, les intégrales $\int_0^1 |f(t)|\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ convergent toutes deux.

a. Si une fonction $f \in \mathcal{F}$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque la variable tend vers $+\infty$, quelle est la valeur de ℓ ?

b. Chacune des fonctions $f \in \mathcal{F}$ qui sont à valeurs réelles positives ou nulles est-elle bornée sur $[\,1, +\infty\,[$?

c. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{F}$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge sans converger absolument.

.../...

d. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ et tout $z \in \Omega$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t - z}\, dt$ converge.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, on définit ainsi sur Ω une fonction g à valeurs complexes par

$$g(z) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t - z}\, dt .$$

On notera désormais T (f) cette fonction g et $\mathcal{G} = T(\mathcal{F})$ l'ensemble de ces fonctions g, c'est-à-dire l'image de $\mathcal{F}$ par l'application T.

3 - Soit $f_1 \in \mathcal{F}$ la fonction définie sur $[\, 0, +\infty \,[$ par $f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$.

a. Montrer que la fonction $g_1 = T(f_1)$ est telle que, pour tout $z \in \Omega$,

$$g_1(z) = 2 \int_0^1 \frac{ds}{1 - (z+1)\, s^2} .$$

b. En déduire que g_1 est développable en série entière de la variable $z + 1$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

c. Pour les valeurs de z réelles appartenant au disque de convergence, exprimer la somme de la série précédente à l'aide des fonctions usuelles.

4 - Soit $f_2 \in \mathcal{F}$ la fonction définie sur $]\, 0, +\infty \,[$ par $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, et soit $\zeta = \xi + i\eta$ un nombre complexe de partie imaginaire η strictement positive. Quelle condition l'hypothèse faite sur η entraîne-t-elle pour la valeur de $z = \zeta^2$ dans $\mathbb{C}$?

Soit $g_2 = T(f_2)$; calculer $g_2(z)$ en fonction de ζ.

II

Soit ρ un nombre réel au moins égal à 1. On désigne par Ω_ρ la partie de Ω constituée des points $z = x + iy$ dont la partie réelle x vérifie l'inégalité $x \leqslant \rho \mid y \mid$ et par Ω^*_ρ la partie de Ω_ρ constituée des points z qui vérifient en outre l'inégalité $\mid z \mid \geqslant \frac{1}{\rho}$.

1 - Soit $f \in \mathcal{F}$; pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Φ_n celle des primitives de la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ qui est définie sur $]\, 0, +\infty \,[$ et nulle pour la valeur n de la variable.

a. Quelle est, pour u réel positif fixé, la limite de la suite de terme général $\Phi_n(n + u)$? La convergence de cette suite vers sa limite est-elle uniforme par rapport à $u \in [\, 0, +\infty \,[$?

b. Vérifier la convergence de l'intégrale

$$\int_n^{+\infty} \left| \Phi_n(t) \frac{z}{(t - z)^2} \right| dt$$

et établir que la suite ayant pour terme général la valeur de cette intégrale converge vers 0 uniformément par rapport à $z \in \Omega_\rho$ (on pourra distinguer deux cas selon le sens de l'inégalité entre les deux nombres $\mid x \mid$ et $\rho \mid y \mid$).

c. Montrer que toute fonction $g \in \mathcal{G}$ tend vers 0 lorsque $\mid z \mid$ tend vers $+\infty$, z restant dans Ω_ρ.

. . . / . . .

d. Montrer par un exemple que pour tout réel $\delta > 0$, il existe une fonction $f \in \mathfrak{F}$ telle que pour tout réel $x > 0$ assez grand, la fonction $g = T(f)$ vérifie $g(-x) \geqslant x^{-\delta}$.

2 - *a.* Montrer que pour toute fonction $g \in \mathfrak{G}$, il existe une constante réelle K telle que, pour tout $z \in \Omega_\rho$ de module assez petit, on ait $|g(z)| \leqslant \frac{K}{|z|}$.

b. Montrer par un exemple que pour tout réel $\delta > 0$, il existe une fonction $f \in \mathfrak{F}$ telle que pour tout réel $x > 0$ assez petit, la fonction $g = T(f)$ vérifie $g(-x) \geqslant x^{-1+\delta}$.

3 - Soient $f \in \mathfrak{F}$, $g = T(f)$ et $z \in \Omega$.

a. Etablir la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt$.

b. Pour z fixé dans Ω et z' tendant vers z en restant dans Ω, exprimer à l'aide d'une intégrale la limite de $\frac{g(z') - g(z)}{z' - z}$ et en déduire la continuité de g sur Ω.

c. La fonction g est-elle bornée sur Ω^*_ρ ?

d. La fonction g est-elle uniformément continue sur Ω^*_ρ ?

III

1 - Soient $f \in \mathfrak{F}$ et $z = x + iy \in \Omega$ un nombre complexe de partie réelle $x > 0$, et dont on note $\bar{z} = x - iy$ le conjugué.

a. Trouver, lorsque y tend vers 0, x restant fixe, la limite de l'intégrale

$$\int_{2x}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right) dt .$$

b. Résoudre la même question pour les intégrales

$$\int_{2x}^{+\infty} f(t) \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2x} [f(t) - f(x)] \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right) dt .$$

c. Lorsque y tend vers 0 par valeurs positives, x restant fixe, déduire de ce qui précède la limite de $g(z) - g(\bar{z})$, où $g = T(f)$.

d. L'application T est-elle injective ?

2 - Pour tout $z \in \Omega$, on désigne par $\sqrt{z}$ celle des deux racines carrées de z dont la partie imaginaire est strictement positive, et on note h la fonction définie sur Ω par $h(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Si h appartient à $\mathfrak{G}$, de quelle fonction $f \in \mathfrak{F}$ est-elle l'image par T ? L'hypothèse qui vient d'être faite sur l'appartenance de h à $\mathfrak{G}$ est-elle justifiée ?

3 - *a.* Quelles sont les fonctions $g \in \mathfrak{G}$ uniformément continues sur Ω ?

b. Chaque fonction $g \in \mathfrak{G}$ est-elle bornée sur Ω ? Résoudre la même question en remplaçant Ω par sa partie Ω^* constituée des points de Ω de module supérieur ou égal à 1.

♦
♦ ♦